De la même façon, après avoir remarqué que $0 \leq I_n \leq u_n (e^2 - 1)$, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

7. Cette dernière limite et l'égalité démontrée à la question 4 permettent de conclure que
$$e^2 = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!}).$$

N°3

1. Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} = \frac{(n-1)\,!\,(k+n-k)}{k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{n\,(n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \binom{n}{k}$$

2. Pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n - 1$, on a d'après la question précédente :
$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} \quad \text{et} \quad \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$
donc $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$.

3. Pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n - 1$, dans l'urne il y a 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches.

1ère méthode : $\overline{A}$ = « aucune boule blanche n'a été tirée ».

Nombre de cas favorables à $\overline{A}$ = nombre de combinaisons à k éléments pris parmi $n - 2$.

Nombre de cas possibles = nombre de combinaisons à k éléments pris parmi n.

Donc $P(\overline{A}) = \binom{n-2}{k} : \binom{n}{k} = \frac{(n-2)\,!}{k\,!\,(n-2-k)\,!}\ \frac{k\,!\,(n-k)\,!}{n\,!} = \frac{(n-k)\,!\,(n-2)\,!}{(n-k-2)\,!\,n\,!} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$.

Or $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ donc $P(A) = 1 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$.

2ème méthode :

P(A) = P(« une seule boule rouge a été tirée ») + P(« deux boules rouges ont été tirées »)
$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}$$ d'après la question 2.

Donc $P(A) = 1 - \binom{n-2}{k} : \binom{n}{k}$ expression déjà obtenue avec la 1ère méthode.

N°4

Partie A

X est le nombre de composants défectueux.

1. X suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,02. On cherche $P(X = 2) = \binom{50}{2} 0{,}02^2\, 0{,}98^{48} \approx 0{,}19$.
2. L'événement $(X \geq 1)$ est le contraire de l'événement $(X = 0)$ donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} 0{,}98^{50} \approx 0{,}64$.
3. Nombre moyen de composants défectueux = espérance de $X = 50 \times 0{,}02 = 1$.

Partie B

On note D l'événement « le composant choisi est défectueux ». On a $P(D) = 0{,}02$.

$P(0 \leq T_1 \leq t) = \int_0^t \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)\,dx$ et $P(0 \leq T_2 \leq t) = \int_0^t \lambda_2 \exp(-\lambda_2 x)\,dx$